Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций

Имитационное моделирование в проектировании и технологии изготовления электронных средств

Профессор кафедры КПРС
доктор технических наук, профессор
Савищенко Николай Васильевич

Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций

Моделирование случайных величин и событий

Профессор кафедры КПРС
доктор военных наук, профессор В.Д. Боев

Учебные цели занятия

Изучить:

- **методы моделирования случайных величин и событий при разработке имитационных моделей.**

Учебные вопросы занятия

1. Моделирование случайных величин.

2. Моделирование единичного события.

3. Моделирование полной группы несовместных событий.

4. Моделирование совместных событий.

Литература

1. Боев В. Д., Сыпченко Р. П. Компьютерное моделирование. Элементы теории и практики: Учеб. пособие. — СПб.: ВАС, 2009. — 436 с.

2. Боев В. Д., Сыпченко Р. П. Компьютерное моделирование. Элементы теории и практики: Курс лекций. — ИНТУИТ.ru, 2010.

3. Боев В. Д. Концептуальное проектирование систем: Учеб. пособие. — ИНТУИТ.ru, 2014.

Введение

Для построения имитационных моделей нужно знать, как моделируются отдельные параметры, имеющие вероятностный характер. В рамках этой лекции мы изучим методы моделирования случайных величин, распределённых по различным вероятностным законам, а также методы моделирования случайных событий, необходимые при разработке имитационных моделей.

1. Моделирование случайных величин

Случайной величиной **называется величина, которая может принимать то или иное значение, *неизвестное заранее*.**

Для моделирования случайной величины нужно знать закон распределения, которому она подчиняется.

Законом распределения случайной величины **называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.**

1. Моделирование случайных величин

В ИМ случайные величины моделируются при помощи генераторов (датчиков) случайных величин, которые входят в современные системы имитационного моделирования.

Особое значение в статистическом моделировании имеет непрерывная **равномерно** распределённая случайная величина:

во-первых, она сама по себе необходима для моделирования случайных процессов и величин, **во-вторых**, с её использованием формируются случайные величины с другими законами распределения.

1. Моделирование случайных величин

Определение. Непрерывная случайная величина γ имеет равномерное распределение в интервале $[a, b]$, если её плотность вероятности определяется так:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b; \\ 0, & x < a, \quad x > b. \end{cases}$$

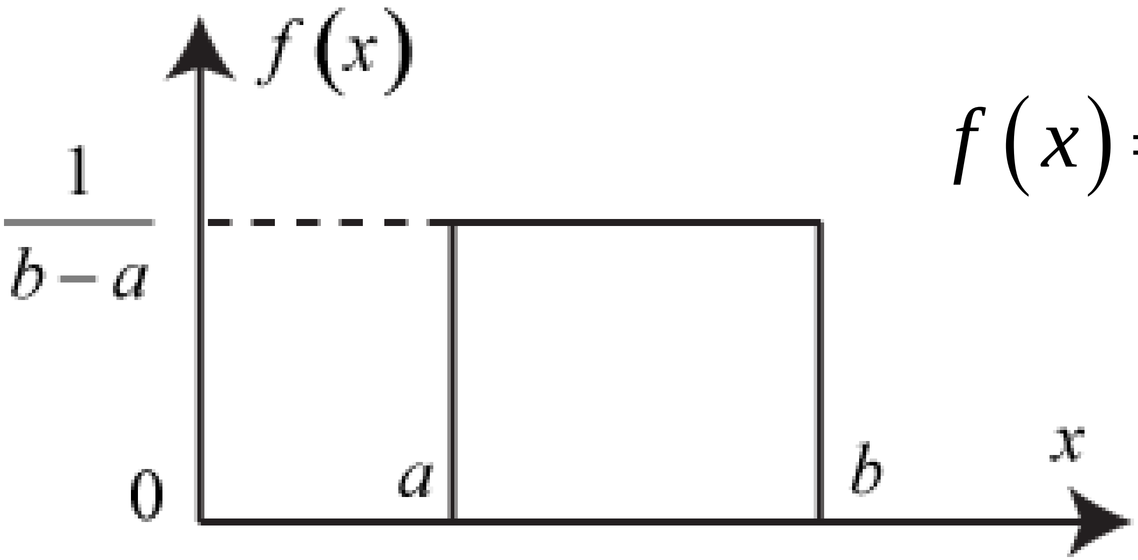

Рис. 1. Плотность вероятности равномерного распределения

1. Моделирование случайных величин

Значения характеристик равномерного закона распределения:

- **математическое ожидание** $M[\gamma] = \dfrac{a+b}{2};$
- **дисперсия** $D[\gamma] = \dfrac{(b-a)^2}{12}.$

Для обращения к датчику равномерно распределённых случайных чисел нужно указать интервал, т. е. a и b, или математическое ожидание и стандартное отклонение: $M[\gamma],\ \sigma = \sqrt{D[\gamma]} = \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}.$

1. Моделирование случайных величин

При моделировании часто используются случайные числа из интервала $[0,\ 1]$.

В этом случае:

- **математическое ожидание** $M[\gamma]=\dfrac{1}{2};$
- **дисперсия** $D[\gamma]=\dfrac{1}{12}.$

Случайное число x_i из интервала $[0,1]$ так преобразуется в случайное число для интервала

$$[a,b]:\ x_{iab}=(b-a)\cdot x_i.$$

1. Моделирование случайных величин

В AnyLogic:

Для обращения к датчику экспоненциально распределённых случайных чисел нужно указывать интенсивность, например:

Exponential(1/68.7)

Математическое ожидание интервалов времени поступления, например, сообщений

1. Моделирование случайных величин

Для обращения к датчику нормально распределённых случайных чисел нужно указывать математическое ожидание и стандартное (среднеквадратическое) отклонение, например: **Normal(11.3,68.7,)**

Стандартное отклонение

Математическое ожидание

2. Моделирование единичного события

Под *единичным событием* мы будем понимать смену состояний одного элемента (системы), причем состояний всего два, например: оборудование исправно — неисправно, канал СМО свободен — занят, цель поражена — не поражена и т.п.

Переход из одного состояния в другое — случайный.

В любой момент времени система находится в одном состоянии с вероятностью P, в другом — с вероятностью $1-P$.

***Цель моделирования*: имитировать состояние такого элемента.**

2. Моделирование единичного события

Теорема. Пусть некоторое событие A свершается с вероятностью $P(A)$.

Это может быть отказ техники, поступление сообщения, уничтожение цели и т. п.

Моделью свершения такого единичного события является попадание значения x_i случайной величины γ, равномерно распределенной в интервале $[0,\ 1]$, в числовой интервал $\left[0,\ P(A)\right]$.

2. Моделирование единичного события

Пример. Пусть вероятность состояния элемента $P(A) = 0{,}9$. В i-ой реализации случайное число $x_i \in \gamma \sim Rav[0,1]$ равно **0,955**. Это означает, что в данной i-ой реализации модели событие не свершилось (рис. 3.2).

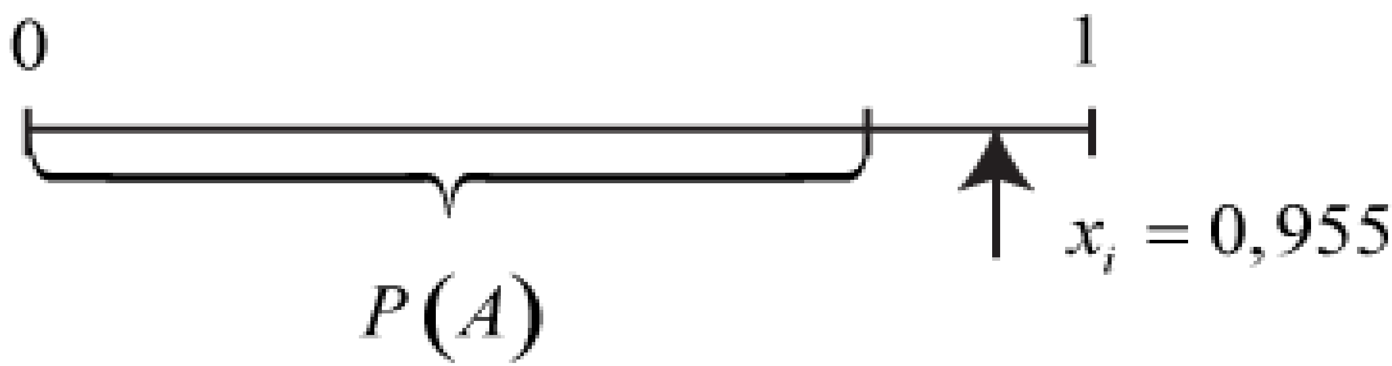

Рис. 3.2. Событие A не произошло

3. Моделирование полной группы несовместных событий

Полная группа событий - это несколько событий, из которых в результате опыта обязательно должно появиться хотя бы одно из них.

Примеры *полных групп событий*:

- выпадение герба и выпадение цифры при одном бросании монеты;
- попадание в цель и промах при выстреле;
- выпадение одного, двух, трёх, четырех, пяти и шести очков при одном бросании игральной кости.

3. Моделирование полной группы несовместных событий

Теорема. В полной группе несовместных событий моделью свершения события A_m, происходящего с вероятностью P_m, является попадание значения $x_i \in \gamma \square Rav[0,1]$ в отрезок, равный P_m, числовой шкалы $\sum_{m=1}^{n} P_m = 1$, где — n число несовместных событий.

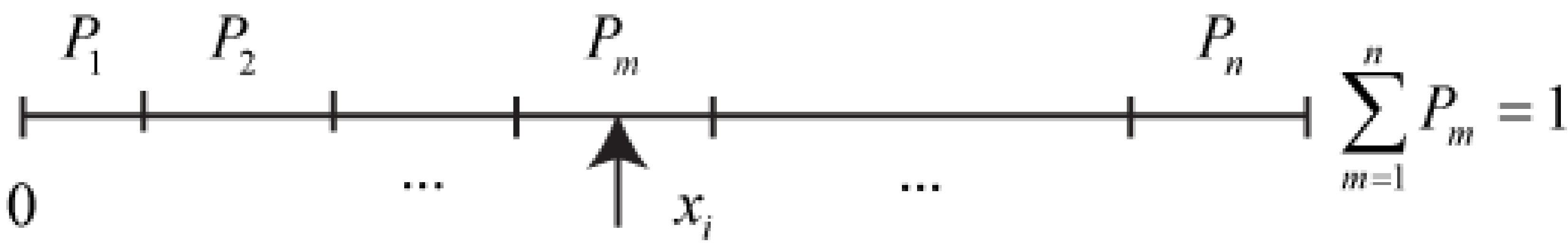

Рис. 3.3. Событие A_m произошло

Такой способ моделирования несовместных событий обычно называют ***определением исходов по жребию***.

3. Моделирование совместных событий

Два **события** называются **независимыми**, если появление одного из них не изменяет вероятность появления другого.

Несколько событий называются ***независимыми в совокупности***, если любое из них не зависит от любого другого события и от любой комбинации остальных.

События называются ***зависимыми***, если одно из них влияет на вероятность появления другого.

Вероятность одного события ***В*** , вычисленная в предположении другого события ***А***, называется ***условной вероятностью события В***: ***Р(В/А)*** .

Моделирование совместных независимых событий

Способ моделирования состоит в том, что совместные независимые события сводятся к одному сложному событию.

Для лучшего понимания способа рассмотрим моделирование двух событий A и B. Увеличение числа событий ничего нового в моделирование не вносит. Пусть независимые события A и B происходят с вероятностями $P(A)$ и $P(B)$ соответственно.

Есть два способа моделирования:

- определение совместных исходов «выбором по жребию»;
- последовательная проверка исходов.

Моделирование совместных независимых событий

Прежде всего, по вероятностям $P(A)$ и $P(A)$ нужно определить (рассчитать) вероятности возможных исходов, т. е. появления совместных независимых событий. Возможные исходы совместного события Q_i и соответствующие вероятности P_i представлены в табл. 3.1, $i = \overline{1,4}$.

Q_i	AB	$\overline{A}B$	$A\overline{B}$	$\overline{A}\,\overline{B}$
P_i	$P(A)P(B)$	$\left[1-P(A)\right]P(B)$	$P(A)\left[1-P(B)\right]$	$1-P_1$
l_r	$l_1 = P(A)P(B)$	$l_2 = l_1 + P_2$	$l_3 = l_2 + P_3$	$l_4 = 1$

Моделирование совместных независимых событий

Совместное событие в ***i*-ой** реализации определяется «**выбором по жребию**».

Если случайное число $x_i \in \gamma \square\ Rav[0,1]$ при очередной реализации окажется, например, на участке $l_1 < x_i \le l_2$, то в данной реализации фиксируется свершение сложного события $\overline{A}B$. Если же окажется $x_i > l_3$, то фиксируется свершение события $\overline{A}\,\overline{B}$.

Особенностью **последовательной проверки исходов** является то, что проверку свершения каждого из совместных событий **надо осуществлять разными случайными числами**, так как события независимые.

Моделирование совместных независимых событий

На рис. 3.4 это показано: после первого сравнения $x_i \le P(A)$ для выполнения второго сравнения $x_{i+1} \le P(B)$ происходит обращение к датчику для получения нового случайного числа.

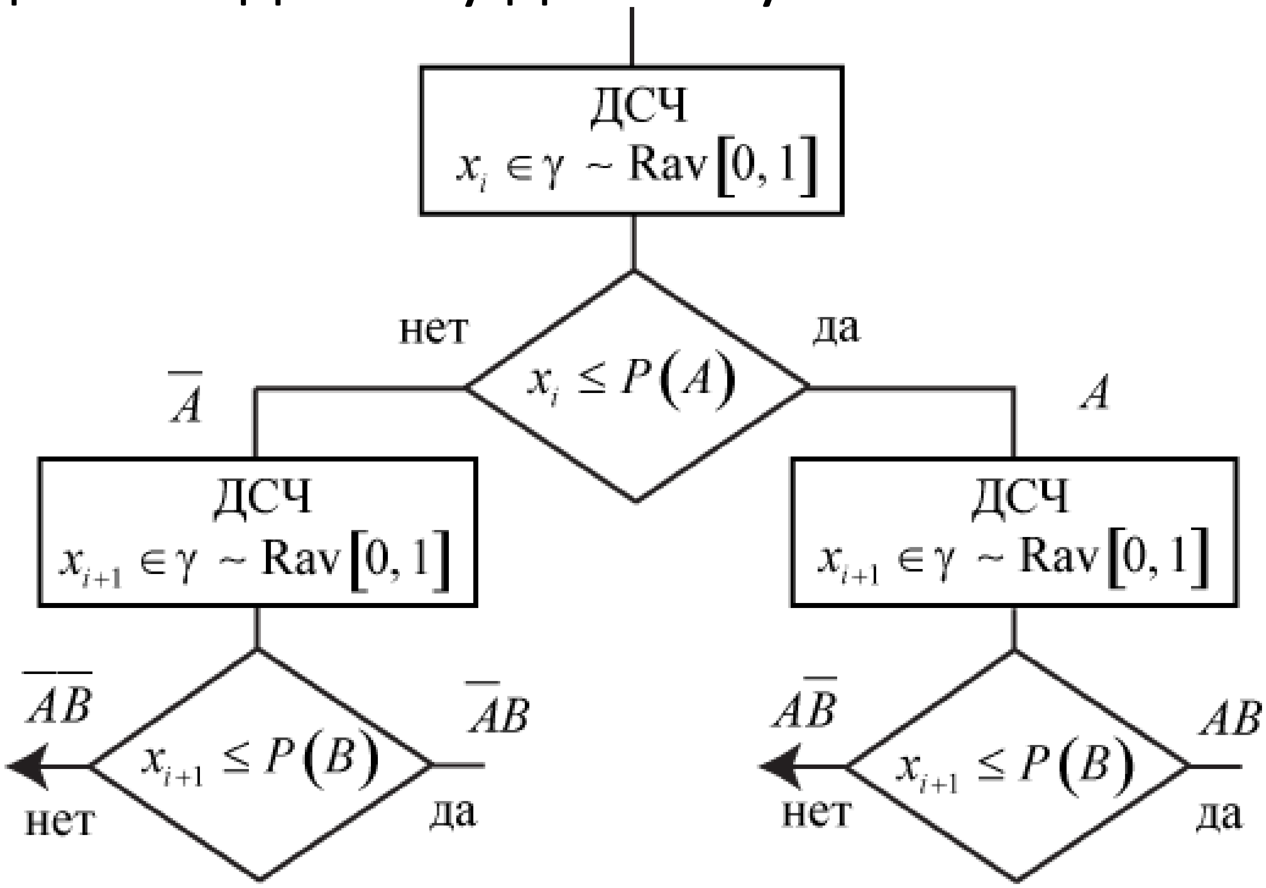

Рис. 3.4. Алгоритм последовательной проверки исходов

Моделирование совместных зависимых событий

Пусть зависимые события ***A*** и ***B*** происходят с вероятностями ***P(A)*** и ***P(B)*** соответственно.

P(B/A) – условная вероятность наступления события ***B*** при условии, что событие ***A*** произошло. Считается, что условная вероятность ***P(B/A)*** задана.

Из $x_i \in \gamma \square Rav\left[0,1\right]$ берётся число x_i (рис. 3.5). Если справедливо неравенство $x_i \le P\left(A\right)$, то событие ***A*** наступило.

Моделирование совместных зависимых событий

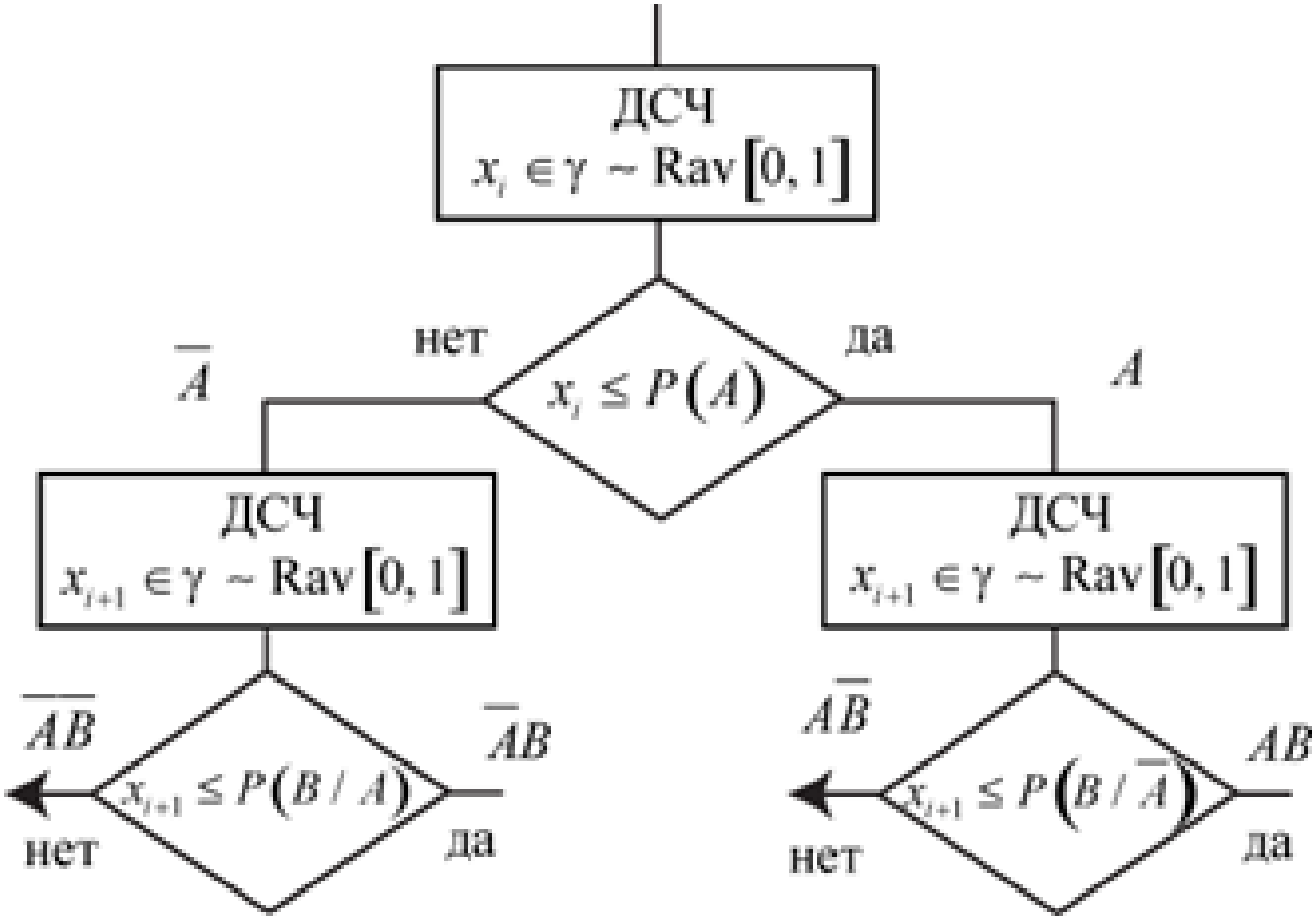

Рис. 3.5. Алгоритм моделирования совместных зависимых исходов

Моделирование совместных зависимых событий

Дальше из $x_i \in \gamma \sim Rav[0,1]$ берётся число x_{i+1} и проверяется условие $x_{i+1} \le P(B/A)$. Исходом испытания при выполнении условия является AB. В противном случае — $A\bar{B}$.

Если условие $x_i \le P(A)$ не выполняется, наступило событие $\bar{A}$. Для испытания, связанного с событием B, необходимо определить вероятность:

$$P(B/\bar{A}) = \frac{P(B) - P(A)\cdot P(B/A)}{1 - P(A)}.$$

Далее из $x_i \in \gamma \sim Rav[0,1]$ берётся число x_{i+1}
и проверяется неравенство $x_{i+1} \le P(B/\bar{A})$. Если оно выполняется, получаем исход испытания $\bar{A}B$.
В противном случае — $\bar{A}\bar{B}$.

Заключение

На лекции мы рассмотрели моделирование:

- случайных величин;
- единичного события;
- полной группы несовместных событий;
- Совместных независимых событий;
- Совместных зависимых событий.

Тема следующего практического занятия:

Имитационное моделирование

1. Алгоритм ИМ нанесения удара.

2. Алгоритм ИМ встречи транспортов.